реализуется для любого $\boldsymbol{l} \in K(S^*)$ *за исключением главных направлений* $\boldsymbol{k}_1^{i_k}$, $\boldsymbol{k}_2^{i_k}$ *(*$k = 1, \ldots, m$*) в точке* M_{i_k}.

Литература

1. Гольденвейзер А. Л. *Теория упругих тонких оболочек.* – М.: Наука, 1976. – 512 с.

2. Гольденвейзер А. Л. *О применении решений задачи Римана–Гильберта к расчёту безмоментных оболочек* // Прикл. матем. и мех. – 1951. – Т. XV. – № 2. – С. 149–166.

3. Векуа И. Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.* – М.: Наука, 1982. – 288 с.

4. Тюриков Е. В. *Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с кусочно-галдкими краями* // Матем. сб. – 1977. – Т. 103 (145). – № 3 (7). – С. 445–462.

5. Тюриков Е. В. *Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 424. – № 4. – С. 455–458.

6. Тюриков Е. В. *Обобщённая граничная задача Гольденвейзера для безмоментных сферических куполов* // Тр. XIV межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. – Т. II. – С. 290–293.

7. Тюриков Е. В. *Об одной специальной задаче Римана–Гильберта и её приложении* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 31–35.

SOME NEW RESULTS ON THE MEMBRANE THEORY OF CONVEX SHELLS

E.V. Tyurikov

Its further development leads to the necessity of such formulation of a boundary problem, which would take into account the specificity of the stress equilibrium provided the concentration of stresses at corner points. Such a formulation is given for the shell with middle surface connected with the use of special boundary conditions of the Riemann–Hilbert problem.

Keywords: Convex shell, Riemann–Hilbert boundary value problem.

УДК 513.74:514.75

ОМБИЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.Т. Фоменко[1]

1 *vtfomenko@rambler.ru*; Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал), ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет (РИНХ).

Пусть $ds^2 = E(u,v)(du^2 + dv^2)$, $E \in C^2(R^2)$ *— метрика постоянной кривизны* $K \geq 0$*, заданная на плоскости* R^2 *параметров* (u,v)*. Автор находит изометрические погружения метрики* ds^2 *в евклидовы пространства размерности* n*,* $3 \leq n \leq 7$*, в виде гиперсферических поверхностей класса* $C^3(R^2)$*, все точки которых являются омбилическими.*

Ключевые слова: Евклидово пространство, метрика, кривизна, погружение, омбилическая поверхность.

Пусть на плоскости параметров (u, v) задана метрика $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$, где $E = E(u, v) > 0$, $E \in C^2$. Будем предполагать, что кривизна K метрики ds^2 постоянна. В случае $K \equiv 0$ плоскость с метрикой ds^2 будем называть проскостью Евклида, а в случае $K > 0$ — плоскостью Римана. Будем говорить, что плоскости Евклида и Римана допускают омбилическое погружение в n−мерное евклидово пространство E^n, $n \geq 3$, в виде поверхности Φ, заданной уравнением $\overline{r} = \overline{r}(u, v)$, $\overline{r} \in C^3$, если выполнены условия:

1. Погружение является изометрическим;

2. Поверхность Φ является гиперсферической, то есть лежит на гиперсфере $S^{n-1}(r)$ радиуса r, где r — некоторое число; $r > 0$;

3. Каждая точка поверхности Φ является омбилической, то есть кривизна нормального сечения поверхности Φ в каждой точке ее не зависит от направления на поверхности в этой точке и отлична от нуля.

Поверхность Φ, реализующую омбилическое погружения, будем называть омбилической и обозначать Φ_{OM} или $\Phi_{OM}(K \equiv 0)$ при $K \equiv 0$ и $\Phi_{OM}(K > 0)$ при $K > 0$. Сходные вопросы рассматривались в [1]-[3].

Теорема 1. *Для любого заданного числа r, $r > 0$, плоскость Евклида допускает омбилические погружения в E^7 в виде омбилических поверхностей $\underset{(\alpha)}{\Phi_{OM}}(K \equiv 0)$, образующих семейство, непрерывно зависящее от параметра α, $\alpha \in [0, 2\pi)$, попарно не конгруэнтных поверхностей, лежащих на гиперсфере $S^6(r)$. Каждая поверхность $\underset{(\alpha)}{\Phi_{OM}}(K \equiv 0)$ определена в E^7 с точностью до движения и лежит кроме того на сфере $S^5(r) \subset S^6(r)$ радиуса r. Все поверхности $\underset{(\alpha)}{\Phi_{OM}}(K \equiv 0)$ лежат также на гиперплоскости $E^6 \subset E^7$.*

Теорема 2. *На поверхностях $\underset{(\alpha)}{\Phi_{OM}}(K \equiv 0)$, лежащих на гиперсфере $S^6(r)$ радиуса r в E^7, можно выбрать такое оснащение с ортонормированным репером $\{\overline{n}_\sigma\}_{\sigma=3}^7$, что основные формы поверхности имеют вид:*

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j; \ \left\| g_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \ u^1 = u, \ u^2 = v;$$

$$II(\overline{n}_3) = b_{3ij} du^i du^j; \ \left\| b_{3ij} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sqrt{2}} E & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r\sqrt{2}} E \end{pmatrix};$$

$$II(\overline{n}_4) = b_{4ij} du^i du^j; \ \left\| b_{4ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r\sqrt{2}} E \\ \frac{1}{r\sqrt{2}} E & 0 \end{pmatrix};$$

$$II(\overline{n}_5) = b_{5ij}du^i du^j;\ \left\| b_{5ij} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}E & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}E \end{pmatrix};$$

$$II(\overline{n}_6) = II(\overline{n}_7) \equiv 0;$$

$$b_{\sigma ij} = \left(\overline{n}_\sigma\,,\, \overline{r}_{ij}\right),\ \overline{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial u^i \partial u^j};$$

$$\omega_{\sigma\tau} = \left(\overline{n}_\sigma\,,\, \partial_i \overline{n}_\tau\right) du^i \equiv \Gamma_{\sigma,i\tau} du^i;\ \partial_i \overline{n}_\tau = \frac{\partial \overline{n}_\tau}{\partial u^i};$$

$$\left\| \Gamma_{3,i4} \right\| = \left(\partial_v \ln E\,;\, -\partial_u \ln E\right);$$

$$\left\| \Gamma_{3,i6} \right\| = \left(-\frac{\sqrt{E}}{r\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3}{2}\psi + \alpha\right);\ \frac{\sqrt{E}}{r\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\psi + \alpha\right) \right);$$

$$\left\| \Gamma_{4,i6} \right\| = \left(\frac{\sqrt{E}}{r\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\psi + \alpha\right);\ \frac{\sqrt{E}}{r\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3}{2}\psi + \alpha\right) \right),$$

где $\psi(u,v) = \int_{(0,0)}^{(u,v)} \left(-\partial_v \ln E du + \partial_u \ln E dv\right)$,

остальные $\Gamma_{\sigma,i\tau} \equiv 0$.

Теорема 3. *Плоскость Римана кривизны $K>0$ допускает омбилические погружения в E^7 в виде трех омбилических поверхностей $\underset{(i)}{\Phi_{OM}}(K>0)$, $i=1,2,3$, таких, что*

$$\underset{(1)}{\Phi_{OM}}(K>0) \in S^2\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \subset S^6\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \subset E^7;$$

$$\underset{(2)}{\Phi_{OM}}(K>0) \in S^4\left(\frac{1}{\sqrt{3K}}\right) \subset S^6\left(\frac{1}{\sqrt{3K}}\right) \subset E^7;$$

$$\underset{(3)}{\Phi_{OM}}(K>0) \in S^6\left(\frac{1}{\sqrt{6K}}\right) \subset E^7.$$

Каждая поверхность $\underset{(i)}{\Phi_{OM}}(K>0)$, $i=1,2,3$, определена в E^7 с точностью до движения.

Теорема 4. На поверхности $\underset{(2)}{\Phi_{OM}}(K>0)$ можно ввести такое оснащение, что матрицы основных форм будут иметь вид:

$$\left\| b_{3ij} \right\| = \begin{pmatrix} \sqrt{K}E & 0 \\ 0 & -\sqrt{K}E \end{pmatrix};\ \left\| b_{4ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{E}K \\ \sqrt{E}K & 0 \end{pmatrix};\ \left\| b_{5ij} \right\| = \begin{pmatrix} \sqrt{3K}E & 0 \\ 0 & \sqrt{3K}E \end{pmatrix};$$

$\left\| b_{6ij} \right\| = \left\| b_{7ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\left\| \Gamma_{3,i4} \right\| = \left(\partial_v \ln E\,;\, -\partial_u \ln E\right)$; $\left\| \Gamma_{\sigma,i\tau} \right\| = (0,0)$ в остальных случаях.

Теорема 5. *На поверхности* $\underset{(3)}{\Phi_{OM}}(K>0)$ *можно ввести такое ортонормированное оснащение с репером* $\{\overline{n}_\sigma\}_{\sigma=3}^{7}$*, что матрицы основных форм поверхности будут иметь вид:*

$$\left\|g_{ij}\right\|=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix};$$

$$\left\|b_{3ij}\right\|=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{2}E\sqrt{K} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{2}E\sqrt{K}\end{pmatrix};$$

$$\left\|b_{4ij}\right\|=\begin{pmatrix}0 & \frac{\sqrt{10}}{2}E\sqrt{K}\\ \frac{\sqrt{10}}{2}E\sqrt{K} & 0\end{pmatrix};$$

$$\left\|b_{5ij}\right\|=\begin{pmatrix}\sqrt{6}E\sqrt{K} & 0\\ 0 & \sqrt{6}E\sqrt{K}\end{pmatrix};$$

$$\left\|b_{6ij}\right\|=\left\|b_{7ij}\right\|=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\left\|\Gamma_{3,i4}\right\|=\left(\partial_v\ln E\,;\,-\partial_u\ln E\right);$$

$$\left\|\Gamma_{3,i6}\right\|=\left(-\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\cos\varphi\,;\,\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\sin\varphi\right);$$

$$\left\|\Gamma_{3,i7}\right\|=\left(-\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\sin\varphi\,;\,-\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\cos\varphi\right);$$

$$\left\|\Gamma_{4,i6}\right\|=\left(\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\sin\varphi\,;\,\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\cos\varphi\right);$$

$$\left\|\Gamma_{4,i7}\right\|=\left(-\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\cos\varphi\,;\,\frac{\sqrt{6K}}{2}\sqrt{E}\sin\varphi\right);$$

$$\left\|\Gamma_{6,i7}\right\|=\left(\frac{3}{2}\partial_v\ln E+\varphi_u\,;\,-\frac{3}{2}\partial_u\ln E+\varphi_v\right),$$

где $\varphi=\varphi(u,v)$ *— некоторая функция класса* c^2*, определяемая репером* $\{\overline{n}_\sigma\}_{\sigma=3}^{7}$*;* $\Gamma_{\sigma,i\tau}\equiv 0$ *в остальных случаях.*

Литература

1. Позняк Э. Г. *Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства* // УМН, 1973, 28. – № 5. – С. 47-76.

2. Фоменко В. Т. *Классификация двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в четырехмерном пространстве постоянной кривизны* // Мат. заметки – Т. 75. – Вып. 4. – 2004. – С. 744-756.

3. Фоменко В. Т. *Омбилические поверхности евклидовых пространств* – Таганрог: Изд. центр Таганрог. гос. пед. ин–та, 2009. – 142 с.

UMBILICAL SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

V.T. Fomenko

Let $ds^2 = E(u,v)(du^2 + dv^2)$, $E \in C^2(R^2)$ be a metric of constant curvature $K \geq 0$, given on the plane R^2 of the parameters (u,v). Author finds the isometric immersions of the metric ds^2 into Euclidean spaces of dimension n, $3 \leq n \leq 7$ as the umbilical hyperspherical surfaces Φ of the class $C^3(R^2)$ and all of Φ points are the umbilical.

Keywords: Euclidean space, metric, curvature, immersion, umbilical surface.

УДК 514.75

ТОР И ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

М.А. Чешкова[1]

1 *cma41@yandex.ru*; Алтайский государственный университет

В работе приводится пример тора M в E^3, отличного от классического тора T, который получается при вращении окружности вокруг оси. Мы рассматриваем тор M как поверхность переноса, которая получается при параллельном переносе одной окружности вдоль другой, причем окружности расположенны во взаимно ортогональных плоскостях. Пусть на торе M задана замкнутая кривая с помощью 4π-периодической вектор-функции $\rho = \rho(v)$. Используя найденную функцию, определяются уравнения листа Мебиуса, бутылки Клейна и скрещенного колпака. С помощью системы компьютерной математики строятся рассматриваемые поверхности.

Ключевые слова: поверхность переноса, тор, периодическая функция, лист Мебиуса, бутылка Клейна, скрещенный колпак.

Поверхность переноса [1, с. 315], [2, с. 130] – это поверхность, которая допускает параметризацию $r(u,v) = U(u) + V(v)$. Линии $U = U(u), V = V(v)$ называются линиями переноса. Поверхность переноса в E^3 можно рассматривать как параллельное перенесение одной линии вдоль другой. К наиболее известным поверхностям переноса в E^3 относятся эллиптический и гиперболический параболоиды и цилиндр, а в E^4 — это тор Клиффорда $r(u,v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v))$. Кривые переноса тора Клиффорда есть окружности, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим поверхность переноса M

$$r(u,v) = U(u) + V(v), u \in [-\pi,\pi], v \in [-\pi,\pi], \quad (1)$$

где $U = U(u), V = V(v)$ есть окружности, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях.

Положим $U(u) = (0, \cos(u), \sin(u)), V(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$.

Поверхность переноса (1) примет вид

$$r(u,v) = (\cos(v), \sin(v) + \cos(u), \sin(u)), u \in [-\pi,\pi], v \in [-\pi,\pi]. \quad (2)$$